Characterization of Attractors and Correlation Functions

九大・理　　吉田　健・森田照光
徐　丙鉄・秦　浩起

§1.

カオスにおけるアトラクターのフラクタル構造を，その各点での確率的な重みを考慮に入れて $f(\alpha)$ スペクトルによってとらえる研究が最近行なわれ始めた。[1] また，類似の定式化で，アトラクター上のカオス軌道の拡がり方を $h(\gamma)$ スペクトルによってとらえる研究も現われ始めた。[2)〜4)] 一方，カオスは時系列のパワースペクトルでしばしばその存在がまず示されるように，軌道の時間相関関数やパワースペクトルによる研究も多い。[5), 6)]

しかしながら，同じカオスに対してこれらの諸量がどのような関係にあるのかという点については，現在のところ研究はまだ少ない。この問題はカオスを統一的に理解する上で重要だと思われる。われわれは簡単な例についてそれを調べ始めた。ここでは，その結果を報告する。

§2.

アトラクター上の点 $\boldsymbol{x}_i$ のまわりの小領域に他の点が落ちる確率が，l を小領域の一次元的な大きさとして $P_i(l) \sim l^{\alpha_i}$ と書けるとする。$f(\alpha)$は，α_i の分布が $\sim l^{-f(\alpha)}$ で与えられるとして定義され，アトラクターの中で同じ α をもつ点から成る部分集合のフラクタル次元という意味をもつ。$f(\alpha)$ と量 $\tau(q) \equiv (q-1)D_q$ とはルジャンドル変換で結びついている。ここで，D_q は一般化次元，D_0 が普通にアトラクターのフラクタル次元であり，D_1 は情報次元である。

時間を Δt ごとに分割して軌道をみるとき，初期から時刻 $n\Delta t$ までに小領域 $i_1, \cdots, i_n$ に軌道が落ちる確率が，n が大きいとき，$P(i_1, \cdots, i_n) \sim \exp[-n\Delta t\gamma(i_1, \cdots, i_n)]$ で与えられ，$\gamma(i_1, \cdots, i_n)$ の分布が $\exp[n\Delta t h(\gamma)]$ になるとして $h(\gamma)$ が定義される。$h(\gamma)$ は量 $\nu(q) \equiv (q-1)K_q$ とルジャンドル変換で結びついている。ただし，K_q は一般化エントロピーで，K_0 がトポロジカルエントロピー，K_1 が KS エントロピーである。

§3.

ここで，パイこね変換

$$(x_{n+1},\ y_{n+1})=\begin{cases}(\lambda_a x_n,\ y_n/a) & (0<y_n<a)\\ (1/2+\lambda_b y_n,\ (y_n-a)/(1-a)) & (a<y_n<1)\end{cases}$$

をとり上げる。ただし，$0<\lambda_a,\ \lambda_b<1/2,\ 0<a<1$ とする。アトラクターはx方向でカントール集合になっており，x方向のみで考えた$\tau(q)$を$\tau_x(q)$と書くと，そのτは

$$(a^q/\lambda_a^{\tau})+(b^q/\lambda_b^{\tau})=1,\quad b=1-a$$

で与えられる。$x-y$面でのアトラクターの$\tau(q)$は$\tau(q)=\tau_x(q)+q-1$ となる。すなわち，y方向の次元は1である。$h(\gamma)$とルジャンドル変換で結びつく$\nu(q)$は

$$\nu(q)=-\ln(a^q+b^q)$$

で与えられる。

次にy方向の相関関数を考える。

$$P_1(y)=1$$
$$P_2(y)=y-\langle y\rangle$$
$$P_3(y)=(y-\langle y\rangle)^2+(a-b)(y-\langle y\rangle)-\frac{1}{12}$$
$$\cdots$$

のようにうまく多項式を選ぶと，それらの相関関数として

$$\langle P_q(y_n)P_q(y)\rangle/\langle P_q(y)^2\rangle=\exp[-\nu(q)n]$$

を得る。これは，y方向には絶対連続な不変測度があること，y方向のフロベニウス・ペロン演算子が上記の多項式に対して(a^q+b^q)という固有値をもつことから導ける。カントール集合になっているx方向の相関関数としては

$$\langle P_q(x_n)P_q(x)\rangle/\langle P_q(x)^2\rangle=\exp[-\mu(q)n]$$

$$\mu_q=-\ln(a\lambda_a^{q-1}+b\lambda_b^{q-1})$$

が導けるが，今のところ$\tau_x(q)$と直接関係をもつ相関関数はみつかっていない。

§ 4.

$f(\alpha)$と$h(\gamma)$の関係。テント写像

$$f(x)=\begin{cases}1-ax & (x>0)\\ 1+bx & (x<0)\end{cases}$$

$(a,\ b>0)$で，逃散がある場合，すなわち$1>a^{-1}+b^{-1}>0$ を満たす場合を考える。一様分布から出発すると，1ステップ当り$e^{-\kappa}=a^{-1}+b^{-1}$の割合で残る。いつまでたっても逃げないものがカントール集合として残る。この不変集合に対して直接計算により

$$\nu(q-\tau(q))=\kappa\tau(q)$$

の関係を得る。$f(\alpha)$と$h(\gamma)$の関係に変換すると

$$\alpha=\gamma/(\gamma+\kappa),\quad f(\alpha)=h(\gamma)/(\gamma+\kappa)$$

となる。この関係は他の一次元写像，たとえば放物線写像に対しても成り立つと考えられる。

更にこの関係は，ヤコビ行列式の値$|J|$が1より小さな定数(散逸系)で，アトラクターが一方向に関しては次元が1，それと直交する方向ではカントール集合であるような二次元写像に対しても成り立つ。たとえば，Hénon 写像はこの条件を満たしていると思われる。パイこね変換では$|J|$が一定ではない。ただし，対応から考えて判るように，$\kappa=-\ln|J|$，$\tau(q)$としてはそのカントール集合に対する$\tau(q)$を用いる。次元が1の方向の$\tau(q)$はいうまでもなく$q-1$に等しい。

この関係がどの程度一般的であるか，また，ヤコビ行列式の値が場所に依存するときにはどのように修正されねばならないかは今後の問題である。

参考文献

1) T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia and B. I. Shraiman: Phys. Rev. **A33** (1986) 1141.

2) J.-P. Eckmann and I. Procaccia: Phys. Rev. **A34** (1986) 659.

3) M. Sano, S. Sato and Y. Sawada: Prog. Theor. Phys. **76** (1986) 945.

4) G. Paladin, L. Peliti and A. Vulpiani: J. Phys. A: Math. Gen. **19** (1986) L991.

5) H. Mori, B.-C. So and T. Ose: Prog. Theor. Phys. **66** (1981) 1266.

6) T. Yoshida and K. Tomita: Prog. Theor. Phys. **76** (1986) 752.